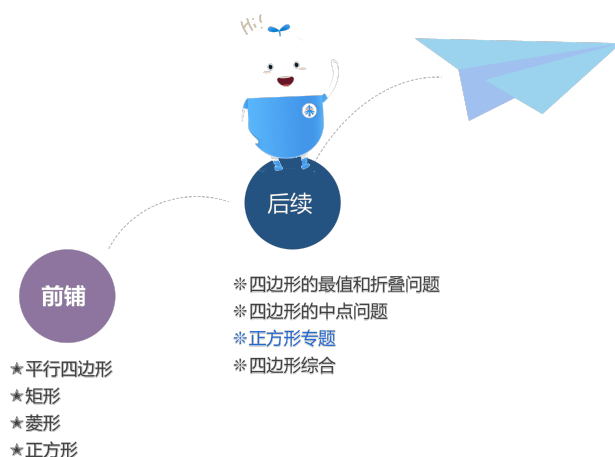
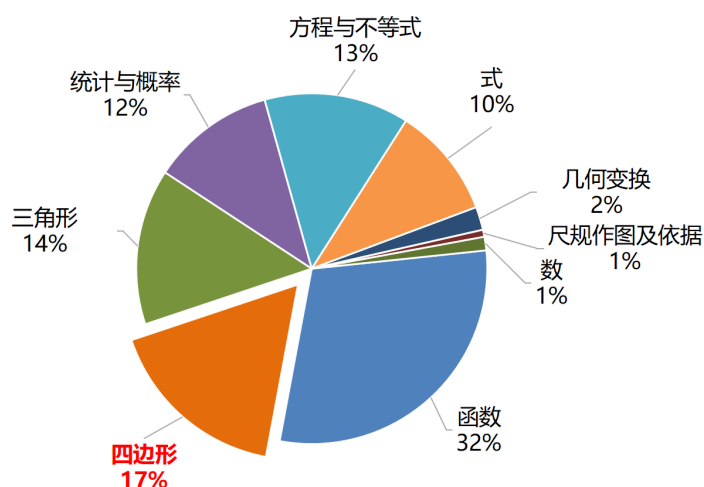


第1讲 正方形中的悬挂与手拉手模型

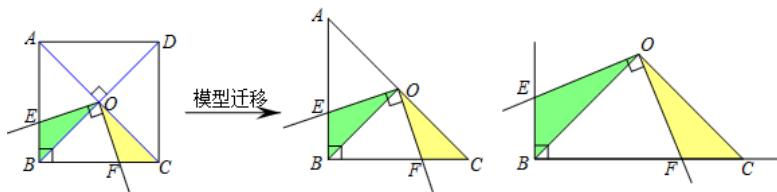
平行四边形属于人教版第十八章的内容，是期中、期末考试的重要知识点，主要考察平行四边形的性质和判定，故这部分我们分为《平行四边形》、《四边形的最值和折叠问题》、《四边形的中点问题》、《正方形专题》、《四边形综合》五个模块。本模块为《正方形专题》，旨在帮助学生了解正方形常见的四个模型与常考题型，理清解题思路。

本模块难度较大，适用于四边形综合的专项提升，本模块分为正方形中的三垂直与半角模型、正方形中的悬挂与手拉手模型2讲内容，帮助学生梳理综合题的解题思路，学会将所学知识进行综合运用。

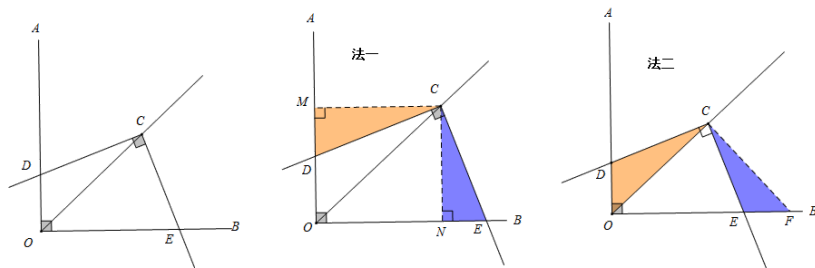


一、 对角互补模型

模型一：正方形ABCD，对角线AC、BD交于点O， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形两边分别交于点E、F。

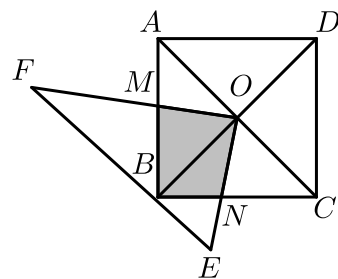


模型变式1：【已知】 $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ，OC平分 $\angle AOB$ ，D、E在OA、OB上。



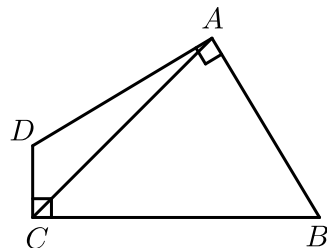
例题1

1. 如图，正方形ABCD的对角线相交于点O， $\text{Rt}\triangle OEF$ 绕点O旋转，在旋转过程中，两个图形重叠部分的面积是正方形面积的（ ）。



- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

2. 如图，在四边形ABCD中， $AB = AD$ ， $AC = 5$ ， $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$ ，则四边形ABCD的面积为（ ）。

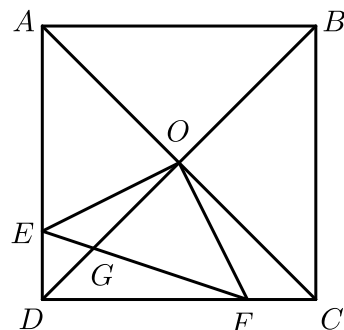


- A. 15 B. 12.5 C. 14.5 D. 17

例题2

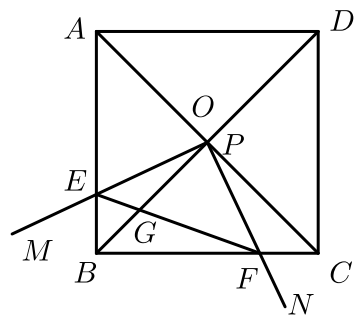
3. 已知正方形 $ABCD$ ，边长为1， E 为 AD 上一动点，且与点 A 、点 D 不重合，过 O 作 $OF \perp OE$ 交 CD 于点 F ， EF 与 BD 交于点 G ，则下列说法正确的有 _____ .

- ① $OE = OF$ ；② $S_{\text{四边形}OEDF} = \frac{1}{4}S_{\text{正方形}ABCD}$ ；③当 $S_{\triangle DEF} + S_{\triangle OFC}$ 最小时， $AE = \frac{3}{4}$ ；④ $OG \cdot BD = FC^2 + AE^2$



练习2

4. 如图所示，边长为1的正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 相交于点 O 。有直角 $\angle MPN$ ，使直角顶点 P 与点 O 重合，直角边 PM 、 PN 分别与 OA 、 OB 重合，然后逆时针旋转 $\angle MPN$ ，旋转角为 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)， PM 、 PN 分别交 AB 、 BC 于 E 、 F 两点，连接 EF 交 OB 于点 G ，有下列结论：
① $\triangle OEB \cong \triangle OFC$ ；② $EF = \sqrt{2}OE$ ；③ $S_{\text{四边形}BEOF} : S_{\text{正方形}ABCD} = 1 : 4$ ；④ $BE + BF = \sqrt{2}OA$ ；其中正确的个数是 () .



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

例题3

5. 定义：有一组对角是直角，夹其中一个直角的两边相等，夹另一个直角的两边不相等的四边形称为准正方形．理解：如图1，若四边形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $CB \neq CD$ ，则四边形 $ABCD$ 是准正方形．

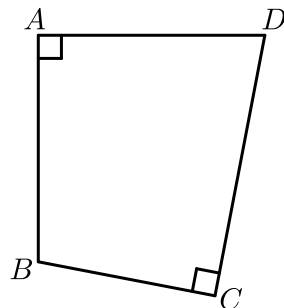


图 1

(1) 判断：正方形 _____ (填：是或不是) 准正方形．

(2) 探究性质：如图1．

① 若四边形 $ABCD$ 是准正方形， $\angle A = \angle C = 90^\circ$ ， $AB = AD$ ， $CB \neq CD$ ，过 A 作 $AM \perp BC$ 交 CB 的延长线于 M ，作 $AN \perp CD$ 于 N ，请在图1中补画出图形，并证明四边形 $AMCN$ 为正方形．

② 求证： AC 平分 $\angle BCD$ ， $BC + CD = \sqrt{2}AC$ ．

(3) 应用：如图2，在平面直角坐标系中，正方形 $ABCD$ 顶点 A 的坐标为 $(0, 4)$ ， B 点在 x 轴上，对角线 AC 、 BD 交于点 M ， $OM = 5\sqrt{2}$ ，则点 C 的坐标为 _____ ．

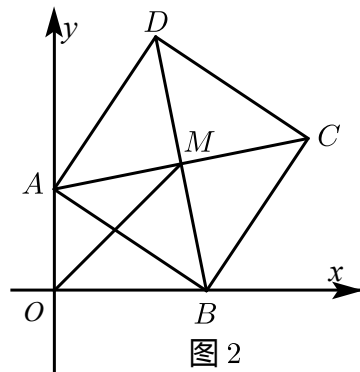
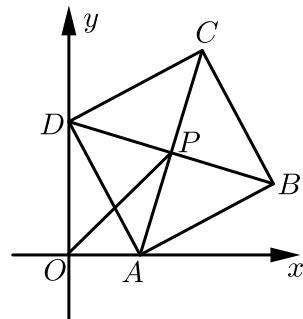


图 2

练习3

6. 已知：如图，平面直角坐标系 xOy 中，正方形 $ABCD$ 的边长为4，它的顶点 A 在 x 轴的正半轴上运动，顶点 D 在 y 轴的正半轴上运动（点 A ， D 都不与原点重合），顶点 B ， C 都在第一象限，且对角线 AC ， BD 相交于点 P ，连接 OP 。



- (1) 当 $OA = OD$ 时，点 D 的坐标为 _____， $\angle POA =$ _____ $^{\circ}$ 。
- (2) 当 $OA < OD$ 时，求证： OP 平分 $\angle DOA$ 。
- (3) 设点 P 到 y 轴的距离为 d ，则在点 A ， D 运动的过程中， d 的取值范围是 _____。

7. 如图1，将三角板放在正方形 $ABCD$ 上，使三角板的直角顶点 E 与正方形 $ABCD$ 的顶点 A 重合．三角板的一边交 CD 于点 F ，另一边交 CB 的延长线于点 G ．

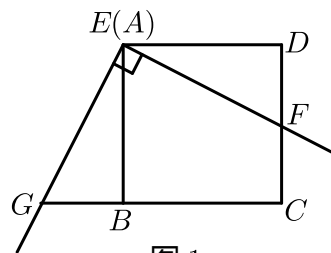


图 1

- (1) 求证： $EF = EG$ ．
- (2) 如图2，移动三角板，使顶点 E 始终在正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 上，其他条件不变，(1)中的结论是否仍然成立？若成立，请给予证明；若不成立，请说明理由．

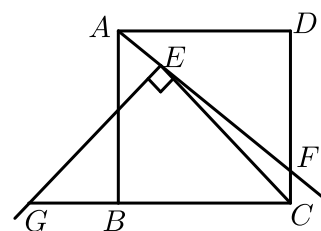


图 2

- (3) 如图3，将(2)中的“正方形 $ABCD$ ”改为“矩形 $ABCD$ ”，且使三角板的一边经过点 B ，其他条件不变，若 $AB = a$ ， $BC = b$ ，求 $\frac{EF}{EG}$ 的值．

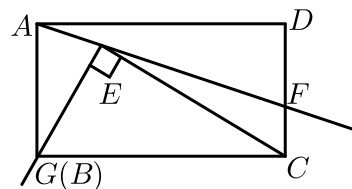
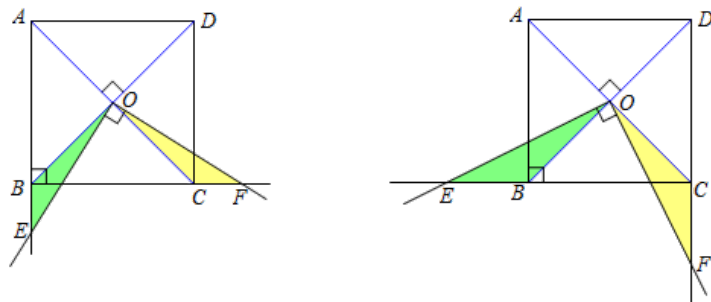


图 3

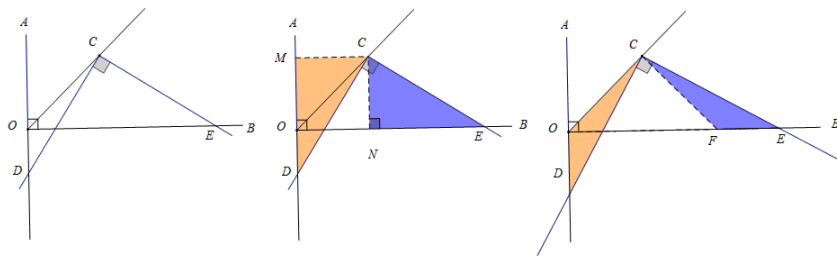
基本模型二

如图，正方形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，旋转 $\angle EOF$ 与正方形的两边延长线分别交于 E 、 F 。



模型变式2

已知： $\angle AOB = \angle DCE = 90^\circ$ ， OC 平分 $\angle AOB$ ， D 在 OA 反向延长线上， E 在 OB 上。

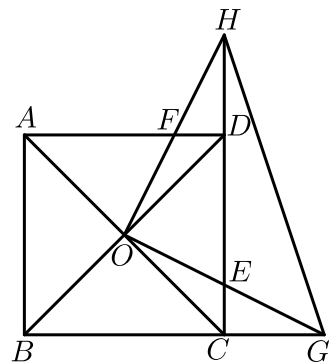


练习4

8. 如图，边长为8的正方形 $ABCD$ 的对角线交于点 O ，点 E 、 F 分别在边 CD 、 DA 上($CE < DE$)，且 $\angle EOF = 90^\circ$ ， OE 、 BC 的延长线交于点 G ， OF 、 CD 的延长线交于点 H ， E 恰为 OG 的中点。下列结论：

- ① $\triangle OCE \cong \triangle ODF$ ；
- ② $OG = OH$ ；
- ③ $GH = 2\sqrt{10}$ 。

其中，正确结论的个数是（ ）。



A. 0个

B. 1个

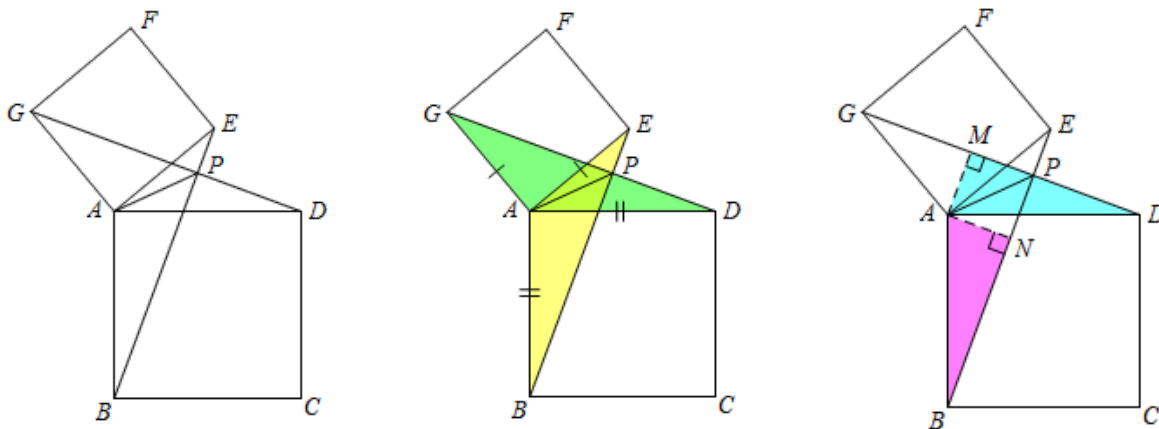
C. 2个

D. 3个

二、手拉手模型

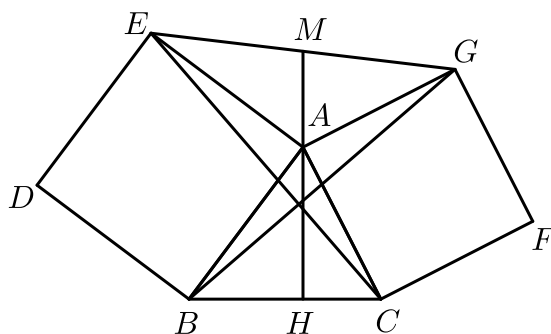
模型结论及证明

已知：如图，四边形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 都是正方形，连接 BE 、 DG ， BE 与 DG 交于点 P 。



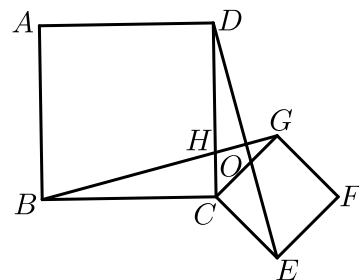
例题5

9. 在锐角三角形 ABC 中， AH 是 BC 边上的高，分别以 AB ， AC 为一边，向外作正方形 $ABDE$ 和正方形 $ACFG$ ，连接 CE 、 BG 和 EG ， EG 与 HA 的延长线交于点 M ，下列结论：① $BG = CE$ ；② $BG \perp CE$ ；③ AM 是 $\triangle AEG$ 的中线；④ $\angle EAM = \angle ABC$ ，其中正确结论的有 _____（填序号）。



练习5

10. 如图，四边形 $ABCD$ 和四边形 $CEFG$ 都是正方形，且 $BC = CD$ ， $CE = CG$ ， $\angle BCD = \angle GCE = 90^\circ$ 。



- (1) 求证： $\triangle BCG \cong \triangle DCE$.
- (2) 求证： $BG \perp DE$.

|| 例题6

11. 如图1, 若四边形 $ABCD$ 、 $GFED$ 都是正方形, 显然图中有 $AG = CE$, $AG \perp CE$.

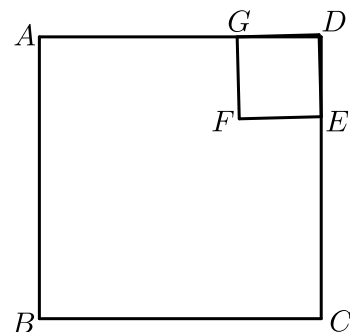


图 1

(1) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到如图2的位置时, $AG = CE$ 是否成立? 若成立, 请给出证明, 若不成立, 请说明理由.

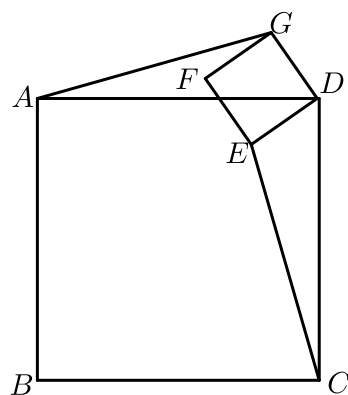
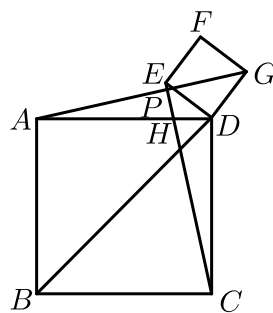


图 2

(2) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到 B, D, G 在一条直线 (如图3) 上时, 连结 CE , 设 CE 分别交 AG 、 AD 于 P 、 H .

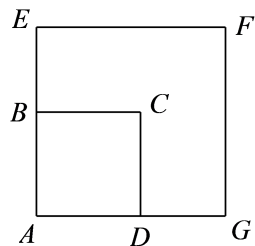


① 求证: $AG \perp CE$.

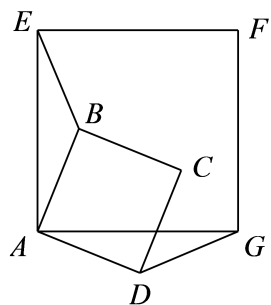
② 如果 $AD = 4$, $DG = \sqrt{2}$, 求 CE 的长.

练习6

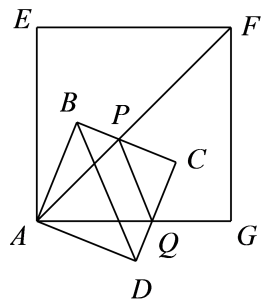
12. 把边长为 a 的正方形 $ABCD$ 和边长为 $2a$ 的正方形 $AEFG$ 按图放置，点 B 、 D 分别在 AE 、 AG 上，将正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转角 α 。



- (1) 连接 BE 、 DG ，如图所示，求证： $BE = DG$ 。



- (2) 正方形 $ABCD$ 绕点 A 顺时针旋转一周的过程中， EB 能否与 AD 平行？若能，直接写出旋转角 α 的值；若不能说明理由。
- (3) 连接 BD 、 AF 。若 $0^\circ < \alpha < 45^\circ$ ， BC 交 AF 于 P ， CD 交 AG 于 Q ，连接 PQ ，如图所示。



- ① 当 $PQ \parallel BD$ 时，求证： $\angle PAB = \angle QAD$ 。
- ② 求证：旋转过程中 $\triangle PCQ$ 的周长等于定值 $2a$ 。

例题7

13. 如图1，正方形 $ABCD$ 与正方形 $AEFG$ 的边 AB 、 AE ($AB < AE$) 在一条直线上，正方形 $AEFG$ 以点 A 为旋转中心逆时针旋转，设旋转角为 α 。在旋转过程中，两个正方形只有点 A 重合，其它顶点均不重合，连接 BE 、 DG 。

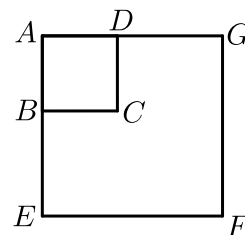


图 1

- (1) 当正方形 $AEFG$ 旋转至如图2所示的位置时，求证： $BE = DG$ 。

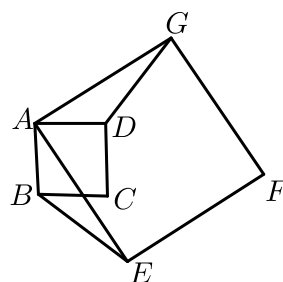


图 2

- (2) 如图3，如果 $\alpha = 45^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AE = 4\sqrt{2}$ ，求点 G 到 BE 的距离。

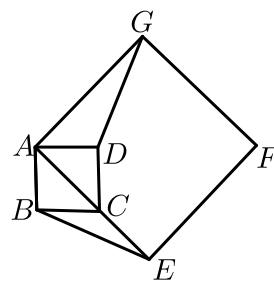
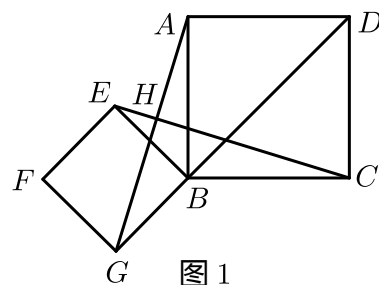


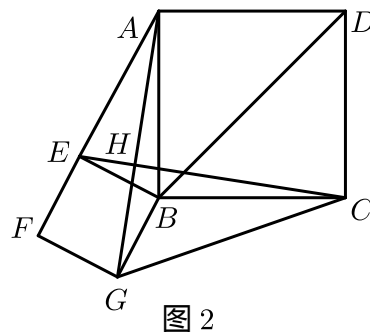
图 3

练习7

14. 如图1, 点 G 是正方形 $ABCD$ 的对角线 DB 的延长线上任意一点, 以线段 BG 为边作一个正方形 $BEFG$, 线段 CE 和 AG 相交于点 H .



- (1) 求证: $CE = AG$, $CE \perp AG$.
- (2) 若 $AB = \sqrt{2}$, $BG = 1$, 求 CE 的长.
- (3) 如图2, 正方形 $BEFG$ 绕点 B 逆时针旋转 α ($0 < \alpha < 90^\circ$), 连接 AE 、 CG , $\triangle BCG$ 与 $\triangle ABE$ 的面积之差是否会发生变化? 若不变, 请求出 $\triangle BCG$ 与 $\triangle ABE$ 的面积之差; 若变化, 请说明理由.



练习8

15. 如图，若四边形 $ABCD$ 、四边形 $GFED$ 都是正方形，显然图中有 $AG = CE$ ， $AG \perp CE$ 。

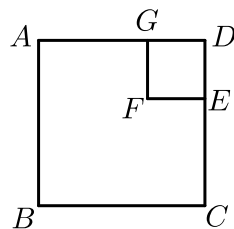


图 1

- (1) 当正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到如图2的位置时， $AG = CE$ 是否成立？若成立，请给出证明，若不成立，说明理由。

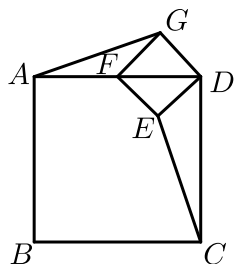


图 2

- (2) 若正方形 $GFED$ 绕 D 旋转到如图3的位置（ F 在线段 AD 上）时，延长 CE 交 AG 于 H ，交 AD 于 M 。

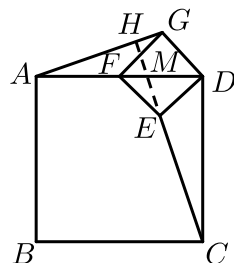


图 3

- ① 求证： $AG \perp CH$ 。
 - ② 当 $AD = 4$ ， $DG = \sqrt{2}$ 时，求 CH 的长。
- (3) 在(2)的条件下，在如图所示的平面上，是否存在以 A 、 G 、 D 、 N 为顶点的四边形为平行四边形的点 N ？如果存在，请在图中画出满足条件的所有点 N 的位置，并直接写出此时 CN 的长度；若不存在，请说明理由。